Online Matematika Könyv és Feladatgyűjtemény Bemutató

Írta: Horváth Tibor György

www.matekotlet.hu

Az alábbiakban a könyv tartalomjegyzékében megadott néhány témakörének középszintű érettségihez tartozó, valamint néhány esetben a hozzá kapcsolódó feladatgyűjtemény egy-egy részletét lehet megtekinteni.

A bemutató **31 db diát** tartalmaz!

2

Halmazok

Halmaz fogalma, jelölése, számossága

Halmaz fogalma, megadása, jelölése

A halmazt **alapfogalom**nak tekintjük, nem értelmezzük.
A halmaz elemekből áll.
Egy halmazban annak mindegyik eleme, csak egyszer fordulhat elő, bár többször felsorolhatjuk.

Halmaz jelölése:	*A halmazokat általában az ábécé nagy betűivel jelöljük.*	Például: **B**
Halmaz elemeinek jelölése:	*Ha az x eleme a **B** halmaznak, azt így jelöljük:* *Ha az x nem eleme a B halmaznak, akkor azt így jelöljük:*	$x \in B$ $x \notin B$
Halmaz megadása:	<u>Szintetikusan</u>: a halmaz elemeinek megadásával: *A betű után a kettőspont egyenlő jel a definiáló egyenlőség jele.* *A kapcsos zárójelek között soroljuk fel az elemeket.*	$B := \{1;2;3;4;6;12\}$ Így olvasd ki : a B halmaz a definíció szerint egyenlő, az 1; 2; 3; 4; 6; 12 elemekből álló halmazzal.
	<u>Analitikusan</u>: A halmaz elemeire jellemző tulajdonság megadásával. *Azok a természetes számok, melyek osztói a 12-nek.*	$B := \{x \mid x \in N \text{ és } x \mid 12\}$ *Van olyan x szám, melyre x természetes szám és x osztója a 12-nek.*
Halmazok ábrázolása:	*Legtöbbször a **Venn-Euler-diagram**mot használjukot használjuk. Ezt a továbbiakban **halmazábrának** nevezzük.*	

Halmazok számossága

A halmazok számossága alatt eleminek számát értjük.
Jele: az abszolútérték jel.
Például: az előző halmazábrában adott **B** halmaz számossága: |B| = 6

3

Halmazok feladatgyűjtemény

6.) Adott a $H \coloneqq \{20-\text{nál nem nagyobb természetes számok}\}$ alaphalmaz, valamint ennek részhalmazai az $A \coloneqq \{\text{páros számok}\}$ és $B \coloneqq \{3-\text{mal osztható számok}\}$.

a.) Ábrázold Venn-Euler diagramon az adott halmazokat!

b.) Határozd meg a következő halmazok elemeit és elemeinek számát!

(1) $A \cup B$
(2) $A \cap B$
(3) $A \setminus B$
(4) $\bar{A}$
(5) $\overline{A \cup B}$
(6) $\overline{A \cap B}$
(7) $\overline{A \setminus B}$
(8) $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$

7.) Adott a $H \coloneqq [-5;\ +10]$ alaphalmaz intervallum, valamint ennek részhalmazai az $A \coloneqq [-3;\ 7[$ és $B \coloneqq]1;\ 8[$ intervallumok.

a.) Ábrázold közös számegyenesen az adott intervallumokat!

b.) Határozd meg a következő halmazok elemeit, s írd fel intervallumok segítségével!

(1) $A \cup B$
(2) $A \cap B$
(3) $A \setminus B$
(4) $\bar{A}$
(5) $\overline{A \cup B}$
(6) $\overline{A \cap B}$
(7) $\overline{A \setminus B}$
(8) $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$

8.) Egy 400 fős iskolában felmérték, hogy az A, B és C könyvek közül, ki melyiket olvasta. A felmérés szerint a gyerekek:

60%-a olvasta az A könyvet;
50%-a olvasta a B könyvet;
50%-a olvasta a C könyvet;
30%-a olvasta az A és C könyvet;
20%-a olvasta a B és C könyvet;
30%-a olvasta az A és B könyvet;
10%-a olvasta el mindhárom könyvet!

a.) Hány tanuló olvasott pontosan 2 könyvet?

b.) Hány tanuló olvasott legalább 2 könyvet?

c.) Hány tanuló nem olvasta a fenti könyvek egyikét sem?

Logika

Konjunkció

Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, egyébként hamis.
Jele: $A \wedge B$
(ejtsd: "*A és B*" vagy "*A, de B*" vagy "*A is és B is*")
Ez a halmazelméletben ismert "**A metszet B**"-nek is megfelel.

Konjunkció igazság táblázata:

KONJUNKCIÓ értéktáblázata		
A	B	$A \wedge B$
Igaz	*Igaz*	***Igaz***
Igaz	*Hamis*	***Hamis***
Hamis	*Igaz*	***Hamis***
Hamis	*Hamis*	***Hamis***

Példák konjunkcióra:

- "*Elmegyek az ABC-be és veszek tejet.*" két kijelentés. Ha mindkettő igaz, akkor az összetett állítás is igaz. Ha bármelyik hamis, akkor az összetett kijelentés hamis..
- "*Megfőztem és elmosogattam.*" Ha mindkét kijelentés igaz, akkor az összetett állítás igaz. Ha bármelyik hamis, akkor az összetett kijelentés hamis.
- "*Ma fújt a szél, és elmentünk vitorlázni.*" Ha mindkét kijelentés igaz, akkor az összetett állítás igaz. Ha bármelyik hamis, akkor az összetett kijelentés hamis.

Ellentmondás mentesség tétele

Az ***A** és nem **A*** nem lehet egyszerre igaz.

$$A \wedge \neg A = hamis$$

A konjunkció műveleti tulajdonságai:

1. Kommutatív: $A \wedge B \equiv B \wedge A$
2. Asszociatív: $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
3. *Idempotens*: $A \wedge A \equiv A ; A \wedge i \equiv A ; A \wedge h \equiv h$

5

Kombinatorika típusfeladatok

Kombinatorika típusfeladatok

1.) Írjuk fel az összes lehetséges négyjegyű számot, mely az $\{1;2;3;4\}$ számjegyekből készíthető úgy, hogy minden számjegyet csak egyszer használunk fel!

A feladat az elemek sorrendjére utal, tehát permutáció. Mindegyik elemet csak egyszer használhatunk fel, így ismétlés nélküli permutáció. Az összes permutáció száma: $P_4 = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$ *eset létezik.*

Az elemek felíráshoz a következőt alkalmazzuk. A négyjegyű szám felírásához első számjegyként 4 féle számjegyet választhatunk. Ezeket írjuk le elsőként.

1 2 3 4

Ezután mindegyik számhoz a megmaradó számjegyekből további hármat választhatunk. Ezeket az előző számokhoz írjuk.

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Ezután a felírt számokhoz a maradék számjegyekből további kettőt írhatunk, majd a megmaradt egy-egy számjegyet is beírjuk.

123	213	312	412	1234	2134	3124	4123
124	214	314	413	1243	2143	3142	4132
132	231	321	421	1324	2314	3214	4213
134	234	324	423	1342	2341	3241	4231
142	241	341	431	1423	2413	3412	4312
143	243	342	432	1432	2431	3421	4321

Így az összes lehetőséget előállítottuk.

2.) Hány négyjegyű számot állíthatunk elő az $\{1;2;3;4\}$ számjegyekből úgy, hogy minden számjegyet többször is felhasználhatunk?

Az eljárás megegyezik az előzővel, csak minden számjegyet többször is felhasználhatunk. Így az első helyre 4 féle számjegyet, a második helyre ugyanennyit, majd a harmadik és a negyedik helyre szintén 4-4 számjegy választható. Ez összesen $4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^4 = 256$ *féle lehetőség. A négyjegyű számok felírása meghaladja e könyv kereteit.*

3.) Hány különböző hangsorozat képezhető az $\{E,E,E,G,G,C,C,D\}$ hangok mindegyikének felhasználásával?

Ha mindegyik hang különbözne, akkor $P_8 = 8! = 40320$ *féle hangsorozatot lehetne készíteni. Tekintettel arra, hogy több azonos is szerepel, ezért a lehetőségek száma csak* $P_8^{3;2;2;1} = \dfrac{8!}{3!\cdot2!\cdot2!\cdot1!} = \underline{\underline{1680}}$ *féle lehet.*

Számelmélet

Legnagyobb közös osztó (röviden LNKO) értelmezése

Az **a** és **b** számok legnagyobb közös osztóján az **a** és **b** számok közös osztói közül a legnagyobb számot értjük.

Más megfogalmazásban: Legyen $a, b, d \in N^+$. Az **a** és **b** szám legnagyobb közös osztóján azt a **d** számot értjük, melyre teljesül:

- a **d** közös osztó, azaz **d|a** és **d|b** *(**d** osztója **a**-nak és **b**-nek)*
- a **d** szám az **a** és **b** szám bármely közös osztójának többszöröse.

A legnagyobb közös osztó jele a zárójel. A fenti megfogalmazás alapján: **(a; b) = d**

Meghatározása:

- Kisebb számok esetén:

  Például: határozzuk meg a 24 és 36 legnagyobb közös osztóját!

  Első módszer: felírjuk az adott számokat osztópárok segítségével, melyből egyszerű az osztók felírása:

  $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ *(A továbbiak már ismétlődnek.)*

  $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$ *(A továbbiak már ismétlődnek.)*.

  Az osztók felírásánál először a szorzatok első tényezőit írd le sorba, majd utána visszafelé a második tényezőket. Így növekvő sorrendbe kerülnek az osztók.

  24 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 12; 24.
  36 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.
  A két szám közös osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 12.
  A közös osztók közül a legnagyobb: 12.
  Ezek alapján: **(24; 36)** = **12**.

  Második módszer:

  Elkészítjük a két szám prímtényezős felbontását, majd mindegyiknél ugyanazokat a számokat megjelöljük.

  $$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

  A megjelölt tényezők szorzatát vesszük.

  Ez a legnagyobb közös osztó: **(24; 36)** $= 2 \cdot 2 \cdot 3 =$ **12**

- Nagyobb számok esetén: elkészítjük az adott számok prímtényezős felbontását, majd **az azonos alapú, kisebb kitevőjű hatványok** szorzatát vesszük.

  Például:

  $a = 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
  $b = 1584 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$
  $(a; b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

  Adottak az alábbi számok prímtényezős alakban. Meghatározzuk a legnagyobb közös osztójukat.

  *Azonos alapú hatvány a **2** és a **3**. Az **a** számban a 2^2, a **b**-ben 2^4 szerepelt. Közülük a kisebb kitevőjű a 2^2. A 3 hatványai közül ugyanígy választunk*

7

Hatványozás

Hatvány értelmezése

Hatványkitevő

Hatvány alap

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}}$$

Ha $a \in R$, és		$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$
ha a kitevő $n \in N$ és	$n \geq 2$ akkor	Az a^n olyan **n** tényezős szorzat, melynek minden tényezője **a**.
	$n = 0$ akkor	$a^0 = 1; (a \neq 0)$ *(A 0^0-t nem értelmezzük.)*
	$n = 1$ akkor	$a^1 = a$
ha a kitevő $n \in Z^-$, akkor		$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Egy szám negatív kitevőjű hatványa megegyezik a szám pozitív kitevőjű hatványának reciprokával.
ha a kitevő $a \in R_0^+$ és $\frac{m}{n} \in Q^+, n \geq 2$ akkor		$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ *Ha* $a > 0$, *akkor* $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Hatványozás azonosságai

Az alábbi azonosságok a következő feltételek esetén érvényesek:

$a, b \in R \setminus \{0\}; n.m \in Z$ és ha $m \neq 0$ és $\frac{n}{m} \in Q$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	**Azonos alapú** hatványokat úgy szorzunk, hogy a kitevőket összeadjuk, s az alapot változatlanul leírjuk. • $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$ • $(-5)^3 \cdot (-5)^2 = (-5)^{3+2} = (-5)^5 = -3125$
$a^n : a^m = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	**Azonos alapú** hatványokat úgy osztunk, hogy az osztandó (számláló) kitevőjéből kivonjuk az osztó (nevező) kitevőjét, s az alapot változatlanul leírjuk. • $3^{15} : 3^{11} = 3^{15-11} = 3^4 = 81$; • $\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3 = 343$ • $\frac{3^2}{3^5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	**Hatványt úgy hatványozunk**, hogy a kitevőket összeszorozzuk, s az alapot változatlanul leírjuk. • $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	**Azonos kitevőjű** hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapok szorzatát az adott hatványra emeljük. • $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$ Ebből következik, hogy **szorzatot** úgy hatványozunk, hogy a szorzat minden tényezőjét az adott kitevőre emeljük.
$a^n : b^n = (a : b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	**Azonos kitevőjű** hatványokat úgy osztunk, hogy az alapok hányadosát az adott hatványra emeljük. • $75^3 : 15^3 = (75 : 15)^3 = 5^3 = 125$; • $\frac{42^3}{98^3} = \left(\frac{42}{98}\right)^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$ Ebből következik, hogy **törtet, hányadost** úgy hatványozunk, hogy a tört számlálóját és nevezőjét, illetve az osztandót és az osztót az adott hatványra emeljük.

Polinomok
Nevezetes szorzatok

NEWTON binomiális tétele

$$(a \pm b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 \pm C_n^1 \cdot a^{n-1} b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^1 b^{n-1} \pm C_n^n a^0 b^n$$

*Az együtthatók **n** elem **k**-ad fokú **kombináció**jával, vagy a **PASCAL HÁROMSZÖG** segítségével határozhatók meg.(A kombinációt részletesen a „Kombinatorika" fejezetben tárgyaljuk!)*

- $(x+2)^5 = 1 \cdot x^5 \cdot 2^0 + 5 \cdot x^4 \cdot 2^1 + 10 \cdot x^3 \cdot 2^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot x^1 \cdot 2^4 + 1 \cdot x^0 \cdot 2^5 =$
  $= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
- $(y-3)^6 = 1y^6 \cdot 3^0 - 6 \cdot y^5 \cdot 3^1 + 15 \cdot y^4 \cdot 3^2 - 20 \cdot y^3 \cdot 3^3 + 15 \cdot y^2 \cdot 3^4 - 6 \cdot y^1 \cdot 3^5 + 1y^0 \cdot 3^6 =$
  $= y^6 - 18y^5 + 135y^4 - 540y^3 + 1215y^2 - 1458y + 729$

A binomiális tétel bizonyítás e lap alján található!

Pascal háromszög Newton binomiális tételéhez

*Az alábbi ábra a **Pascal-háromszög** felépítését mutatja. A piramisszerű felépítés szélén egyesek szerepelnek. A belül levő számokat úgy kapjuk, hogy két-két szám közé – egy sorral lejjebb - beírjuk a két szám összegét. A háromszög tetszőleges mértékben folytatható. **Az egy sorban szereplő számok az adott fokszámú kéttagú összeg hatványában szereplő együtthatókat adja.***

Például az $(a \pm b)^3 = 1 \cdot a^3 b^0 \pm 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 \pm 1 \cdot a^0 b^3$ *összefüggésben az együtthatók a harmadik sorból olvashatók ki.*

								1							
							1		1						
Második						1		2		1					
Harmadik					1		3		3		1				
Negyedik				1		4		6		4		1			
Ötödik			1		5		10		10		5		1		
Hatodik		1		6		15		20		15		6		1	
Hetedik	1		7		21				35		21		7		1

További tételek

A binomiális tétel alapján érvényesek az alábbi tételek:

$$(a+b) \cdot \left(a^{n-1} b^0 - a^{n-2} b^1 + a^{n-3} b^2 + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} \cdot a^0 b^{n-1}\right) = a^n + b^n$$

Ebből következik, hogy $(a+b) \mid (a^n + b^n)$ *azaz* **a+b** *osztója az* $a^n + b^n$ *kifejezésnek.*

- $(y+3) \cdot \left(y^6 \cdot 3^0 - y^5 \cdot 3^1 + y^4 \cdot 3^2 - y^3 \cdot 3^3 + y^2 \cdot 3^4 - y^1 \cdot 3^5 + y^0 \cdot 3^6\right) = y^7 + 3^7$

Tehát **y+3** *osztója az* $y^7 + 3^7$ *kifejezésnek.*

$$(a-b) \cdot \left(a^{n-1} b^0 + a^{n-2} b^1 + a^{n-3} b^2 + \ldots + a^0 b^{n-1}\right) = a^n - b^n$$

Ebből következik, hogy $(a-b) \mid (a^n - b^n)$ *azaz* **a-b** *osztója az* $a^n - b^n$ *kifejezésnek.*

- $(x-2) \cdot \left(x^4 2^0 + x^3 2^1 + x^2 2^2 + x^1 2^3 + x^0 2^4\right) = x^5 - 2^5$ *Tehát* **x-2** *osztója* $x^5 - 2^5$

Tört kitevőjű hatványok

Tört kitevőjű hatványok típusfeladatok

1.) Végezzük el a műveleteket! A hatványok alapja pozitív, s a betűk pozitív számokat jelentenek.

Megoldási ötletek: A hatványozás és a gyökvonás azonosságait alkalmazzuk a műveleti sorrend betartásával.

a.) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{-1}{3}}=a^{\frac{3-2}{6}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$

A hatványozás azonosságai alapján a kitevőket összeadjuk. A kapott eredményt gyökkitevővel írjuk fel.

b.) $3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}2a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}=$

$=6\cdot a^{\frac{1}{3}+\frac{-2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=6\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2+3}{4}}=$

Összeszorozzuk a számokat, majd az azonos alapú hatványok kitevőit összeadjuk.
A legtöbb esetben elég, ha eddig oldjuk meg a feladatot. Csak akkor folytatjuk, ha a feladatban szerepel.

$=6\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\cdot b^{\frac{5}{4}}=6\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[4]{b^5}=$

A kapott negatív kitevőjű hatványt pozitív kitevővel írjuk fel. A tört kitevőjű hatványokat gyökkitevősre alakítjuk.

$=\frac{6}{\sqrt[3]{a}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[4]{b^{4+1}}=\frac{6\cdot\sqrt[6]{a^2}\cdot b\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt[3]{a^3}}=$

A nevező gyöktelenítésével együtt (ez a jelzett új szorzótényező) a negyedik gyök alatti kifejezést is átalakítjuk úgy, hogy egy változó kikerüljön a gyök elé.

$=\frac{6b\cdot\sqrt[6\cdot2]{a^{2\cdot2}}\cdot\sqrt[4\cdot3]{b^{1\cdot3}}}{a}=\frac{6b\cdot\sqrt[12]{a^4b^3}}{a}$

A hatodik és a negyedik gyökkitevőket tizenketedik gyökkitevővé alakítjuk, így a kifejezések egy gyökjel alá írhatók.

c.) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=$

$=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=$

A zárójelben levő tagokat megszorozzuk a tényezőkkel.

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}=$

A szorzatokban szereplő azonos alapú hatványok kitevőit összeadjuk.

$=a^1b^{\frac{1}{2}}-b^1a^{\frac{1}{2}}=a\cdot\sqrt{b}-b\cdot\sqrt{a}$

A kapott kifejezéseket gyökkitevős alakba írjuk.

d.) $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{2}})\cdot(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{2}})=$

$=(x^{\frac{2}{3}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=x^{\frac{2}{3}\cdot2}-y^{\frac{1}{2}\cdot2}=x^{\frac{4}{3}}-y^1$

A feladat az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosság alkalmazásával megoldható.

Logaritmus

2.) Logaritmus definíció alkalmazása

Megoldási ötletek: A hatványozás azonosságai segítségével olyan alakra hozzuk a kifejezést, hogy az megfeleljen az $a^{\log_a B}$ alaknak. Ennek értéke B.

a.) $10^{1-\lg 2{,}5} =$

$$= \frac{10^1}{10^{\lg 2{,}5}} = \frac{10}{2{,}5} = 4$$

Alkalmazzuk az $a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$ azonosságot. Így a nevezőben 10 kitevője 10-es alapú logaritmus. Ennek értéke a logaritmusban szereplő szám. Innen már csak az osztást kell elvégezni.

b.) $10^{\lg 6+\lg 5} =$

$$= 10^{\lg 6}\cdot 10^{\lg 5} =$$
$$= 6\cdot 5 = 30$$

A kitevőket akkor adjuk össze, ha azonos alapú hatványok szorzását végezzük. Így az $a^{n+m} = a^n\cdot a^m$ azonosságot alkalmazzuk. Ekkor teljesül az $a^{\log_a B} = B$ definíció, tehát az itt szereplő szorzat felírható.

c.) $25^{\log_5 3} =$

$$= \left(5^2\right)^{\log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

A 25 prímtényezős alakba írható. Ekkor alkalmazzuk az $\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n$ azonosságot, vagyis a hatványkitevők felcserélhetők. Ekkor a hatvány alapja, illetve a logaritmus alapja megegyezik, tehát alkalmazható a definíció.

d.) $7^{\log_{\sqrt7} 5+\log_{49} 9} =$

$$= 7^{\log_{\sqrt7} 5}\cdot 7^{\log_{49} 9} =$$
$$= \left(\sqrt7^{\,2}\right)^{\log_{\sqrt7} 5}\cdot\left(\sqrt{49}\right)^{\log_{49} 9} =$$
$$= \left(\sqrt7^{\,2}\right)^{\log_{\sqrt7} 5}\cdot\left(49^{\frac12}\right)^{\log_{49} 9} =$$
$$= \left(\sqrt7^{\log_{\sqrt7} 5}\right)^2\cdot\left(49^{\log_{49} 9}\right)^{\frac12} =$$
$$= 5^2\cdot 9^{\frac12} = 25\cdot\sqrt9 = 25\cdot 3 = 75$$

A kitevőben levő összeadás miatt a kifejezés szorzat alakba írható. Ahhoz, hogy alkalmazhassuk az $a^{\log_a B} = B$ definíciót, mindkét tényezőt át kell alakítani. Az elsőben a logaritmus alapja: $\sqrt7$, melynek négyzete megegyezik a hatvány alapjával. A második tényezőben a logaritmus alapja **49**, melynek négyzetgyöke a hatvány alapja. Ezeket figyelembe véve alakítjuk át a kifejezéseket. A négyzetgyök törtkitevővel is felírható.

A hatványkitevők felcserélésével az $a^{\log_a B} = B$ alakot kapjuk. Ezt alkalmazva egy egyszerű műveletsort kapunk.

Logaritmus feladatgyűjtemény

8.) A logaritmus azonosságainak felhasználásával fejezd ki az ismeretleneket az alábbi egyenletekből!

a.) $log_3 a = log_3 5 + log_3 8$

b.) $lgb = lg15 - lg3$

c.) $lnc = 2 \cdot ln7$

d.) $log_7 d = \frac{log_7 9}{2}$

e.) $lge = \frac{1}{2} \cdot lg5 + \frac{1}{3} \cdot lg4$

f.) $log_2 f = log_2 \sqrt{44} - log_2 \sqrt{11} + log_2 3$

g.) $log_5 g = 2 \cdot log_5 4 - \frac{log_5 8}{3} + 3 \cdot log_5 \sqrt[3]{2}$

9.) Írd fel a következő egyenlőségek természetes alapú logaritmusát!

a.) $a = 8 \cdot x^2$

b.) $b = \frac{9 \cdot x^3}{5}$

c.) $c = 7 \cdot \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt{x}$

d.) $d = 12 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^3}{5}}$

e.) $e = x^5 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{7^2}}$

10.) Számológép segítségével határozd meg a következő kifejezések értékét!

a.) $lg83{,}4 =$

b.) $lg0{,}0095 =$

c.) $log_8 25 =$

d.) $log_4 13 =$

e.) $lg19^{235} =$

f.) $lg\frac{48^{137}}{28^{216}} =$

g.) $lg\sqrt[423]{342^{237}} =$

h.) $lg\sqrt[7]{\frac{0{,}83^3 \cdot 19354}{0{,}045}} =$

11.) Számológép segítségével határozd meg az ***X*** és ***Y*** értékét!

$$X = \frac{211^{108} \cdot 67^{115}}{8^{195} \cdot 10^{52}} \; ; \; Y = \frac{\sqrt[15]{36{,}2^{1215}}}{48{,}7^{73}}$$

Másodfokú egyenletek

Másodfokú egyenlet gyöktényezős alak használata: Megoldási ötletek

Ha ismerjük, az $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ egyenlet megoldásait (x_1, x_2), akkor az egyenlet felírható $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ gyöktényezős alakban.

Másodfokú egyenlet gyöktényezős alak használata: Típusfeladatok

1.) Írjunk fel olyan másodfokú egyenleteket, melyeknek a következő számpárok a gyökei!

Mindegyik feladatban konkrét számot is írhattunk volna az **a** értékeihez, de ezt az olvasó is megteheti a feltételek alapján! Az **a** értéke legtöbbször **1**.

a.) $(5;8) \Rightarrow a \cdot (x-5) \cdot (x-8) = 0$, *ha* $a \in R, a \neq 0$

b.) $(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}) \Rightarrow a \cdot (x-(3-\sqrt{2})) \cdot (x-(3+\sqrt{2})) = 0$, *ha* $a \in R, a \neq 0$

c.) $(\sqrt{7};-\sqrt{2}) \Rightarrow a \cdot (x-\sqrt{7}) \cdot (x+\sqrt{2}) = 0$, *ha* $a \in R, a \neq 0$

Másodfokú polinomok szorzattá alakítása

2.) Bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára a következő polinomokat!

Úgy tekintjük, mintha egy egyenlettel állnánk szemben. Felírjuk a megoldó-képletet, meghatározzuk az egyenlet megoldásait, majd ez alapján felírjuk a szorzat alakot.

a.) $m^2 - 2m - 3 =$ *A másodfokú tag együtthatója 1, illetve az elsőfokú tag páros szám, ezért a második megoldó-képlettel dolgozunk.*

$p = -2; q = -3$

$$m_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 - \left({}^{-}3\right)} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$$

$m_1 = 1 - 2 = -1$ *és* $m_2 = 1 + 2 = 3$

Ezek alapján felírható a szorzat: $m^2 - 2m - 3 = (m - {}^{-}1) \cdot (m-3) = (m+1) \cdot (m-3)$

b.) $72y^2 - 67y + 15 =$

$a = 72; b = -67; c = 15$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-{}^{-}67 \pm \sqrt{(-67)^2 - 4 \cdot 72 \cdot 15}}{2 \cdot 72} = \frac{67 \pm \sqrt{4489 - 4320}}{144} =$$

$$= \frac{67 \pm \sqrt{169}}{144} = \frac{67 \pm 13}{144}$$

$y_1 = \frac{67-13}{144} = \frac{54}{144} = \frac{3}{8}$ *és* $y_1 = \frac{67+13}{144} = \frac{80}{144} = \frac{5}{9}$

Ezek alapján felírható a szorzat: $72y^2 - 67y + 15 = 72 \cdot \left(y - \frac{3}{8}\right) \cdot \left(y - \frac{5}{9}\right)$

Logaritmikus egyenletek

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán! Az ellenőrzés az olvasó feladata!

Megoldási ötletek: Az előzőekben bemutatott megoldási lehetőségek segítenek a feladatok megoldásában. Minden esetben állapítsuk meg az egyenlet értelmezési tartományát (a függvények értelmezési tartományát), majd a bemutatott példák és a logaritmus azonosságainak alapján oldjuk meg a feladatokat. A végeredményt minden esetben egyeztetni kell az alaphalmazzal, majd az eredeti egyenletbe kell visszahelyettesítve ellenőrizni. *A megoldáshoz felhasználjuk, hogy **a logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt a két oldalról elhagyható a logaritmus jele.***

1.) $\log_{1000} x = -\frac{2}{3}$

$$x = 1000^{-\frac{2}{3}} = \left(10^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 10^{-2} = \underline{\underline{0{,}01}} \in A$$

Kikötés: $x > 0$, *így* $x \in \left]0;+\infty\right[= A$

A logaritmus definíciója, illetve a hatványozás azonosságai alapján a feladat megoldható.

2.) $\lg x = 2{,}4298$

$$x = 10^{2{,}4298} = 10^{2+0{,}4298} =$$
$$= 10^2 \cdot 10^{0{,}4298} = 100 \cdot 2{,}6903 = \underline{\underline{269{,}03}} \in A$$

Kikötés: $x > 0$, *így* $x \in \left]0;+\infty\right[= A$

*A logaritmust definícióját alkalmazzuk (a logaritmus alapja **10**). A 10 hatványának megkeresését táblázat alapján végeztük el. Közelítő értéket kapunk.*

3.) $\log_2(x+10) = 3$

$$x + 10 = 2^3 = 8$$
$$\underline{\underline{x = -2}} \in A$$

Kikötés: $x + 10 > 0 \Rightarrow x > -10$ *így* $x \in \left]-10;+\infty\right[= A$

A logaritmus definícióját alkalmazzuk.

4.) $\log_x 3x = 3$

$$3x = x^3$$
$$x^3 - 3x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 3) = 0$$
$$x_1 = 0 \notin A$$

továbbá:

$$x^2 = 3$$
$$x_2 = \sqrt{3} \in A$$
$$x_3 = -\sqrt{3} \notin A$$

Kikötés: $x > 0$ *és* $x \neq 1$, *így* $x \in \left]0;+\infty\right[\setminus \{1\} = A$

A logaritmus definícióját alkalmazzuk, majd a kapott egyenletet nullára rendezve szorzattá alakítjuk.
A szorzat értéke akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Csak az x_2 érték felel meg a feltételeknek.

5.) $\log_x(x+6) = 2$

$$x + 6 = x^2$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

Kikötés: $x > 0$ *és* $x \neq 1$, *valamint*
$x + 6 > 0 \Rightarrow x > -6$, *így* $x \in \left]0;+\infty\right[\setminus \{1\} = A$

A logaritmus definíciója alapján a feladat megoldható.

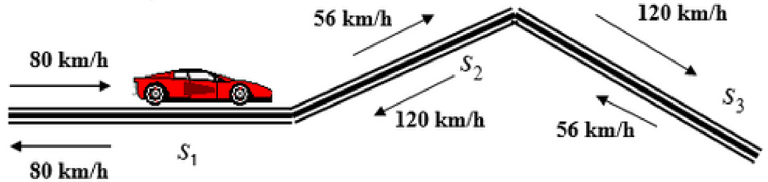
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \notin A \\ x_2 = \frac{1+5}{2} = 3 \in A \end{cases}$$

A kapott másodfokú egyenletet megoldva, az eredeti egyenlet megoldása: $\underline{\underline{x = 3}}$

Másodfokú egyenletrendszerek

6.) Az egyik gépkocsi sík terepen 80 km/h-val, az emelkedőn 56 km/h-val, a lejtőn 120 km/h-val halad. A 320 km hosszú utat oda 4 óra alatt, vissza 4,25 óra alatt teszi meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok?

A feladatot érdemes lerajzolni!



Ha az autó odafelé emelkedőnek halad, akkor visszafelé ugyanez az út lejtő, míg egy odafelé lejtős út visszafelé emelkedő lesz. Így ezeken az útvonal részeken az autó más-más sebességekkel halad.

A teljes útvonalon a vízszintes út összes hosszát: S_1, az összes emelkedő hosszát: S_2, a lejtős út összes hosszát S_3 jelöli. Tudjuk, hogy $t = \frac{s}{v}$, így az egyes útszakaszokra felírhatók az ott eltöltött időtartamok a sebesség függvényében.

Összes út: $s_1 + s_2 + s_2 = 320$

Az egyes útszakaszok összege 320 km.

Odafelé: $\frac{s_1}{80} + \frac{s_2}{56} + \frac{s_3}{120} = 4 \quad / \cdot 1680$

*Ha az **s1** útszakaszon az autó 80 km/h sebességgel halad, akkor ott $\frac{s_1}{80}$ órát töltött. Ugyanígy a többi útszakaszra is felírhatók az összefüggések. Ezek összege az útirányban eltöltött időt adja.*

Visszafelé: $\frac{s_3}{56} + \frac{s_2}{120} + \frac{s_1}{80} = \frac{17}{4} \quad / \cdot 1680$

Visszafelé a lejtős út emelkedő, illetve az emelkedő lejtő lesz, így ott az arra az útszakaszra érvényes sebességet kell felírni.

Egyenletrendszer:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 320 \quad \Rightarrow s_1 = 320 - s_2 - s_3$$

$$21s_1 + 30s_2 + 14s_3 = 6720$$

$$30s_3 + 14s_2 + 21s_1 = 7140$$

$$21 \cdot (320 - s_2 - s_3) + 30s_2 + 14s_3 = 6720$$

$$21 \cdot (320 - s_2 - s_3) + 14s_2 + 30s_3 = 7140$$

$$6720 - 21s_2 - 21s_3 + 30s_2 + 14s_3 = 6720$$

$$6720 - 21s_2 - 21s_3 + 14s_2 + 30s_3 = 7140$$

$$9s_2 - 7s_3 = 0 \quad \Rightarrow s_2 = \frac{7s_3}{9}$$

$$-7s_2 + 9s_3 = 420$$

$$-7 \cdot \frac{7s_3}{9} + 9s_3 = 420$$

$$-49s_3 + 81s_3 = 3780$$

$$32s_3 = 3780$$

$$s_3 = 118{,}125$$

$$s_2 = \frac{7}{9} \cdot 118{,}125$$

$$s_2 = 91{,}875$$

$$s_1 = 320 - 91{,}875 - 118{,}125$$

$$s_1 = 110$$

Megoldás: *Az egyes útszakaszok hossza:*

A vízszintes út: $110 km$ ***Az emelkedő út:*** $91{,}875 km$ ***A lejtős útszakasz:*** $118{,}125 km$

15

Eltolás

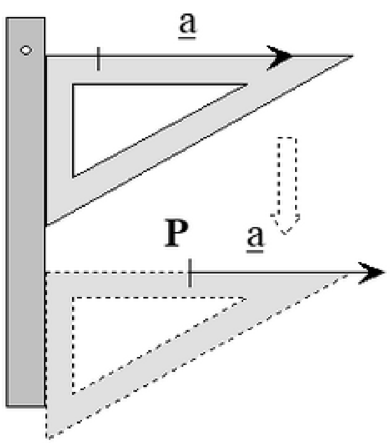
Eltolás szerkesztése

Egy pont eltolása két vonalzóval

Egyes iskolákban engedélyezni szokták e művelethez két vonalzó használatát, de az Euklideszi szerkesztés szabályai alapján azonban nem alkalmazható egyenes vonalzón és körzőn kívül más eszköz. E két vonalzós módszert mutatjuk be.

A „szerkesztés" lépései:

1. Helyezzük a derékszögű vonalzó egyik befogóját a vektorra az ábrán látható módon. A másik befogóhoz a másik vonalzót illesztjük. *(Itt az egyenes vonalzót helyeztük oda.)*
2. Szorítsuk le ezt az egyenes vonalzót, majd a derékszögű vonalzót addig csúsztatjuk el e mellett, míg a pontra nem kerül az előzőleg vektort tartalmazó éle.
3. Szorítsuk le a háromszögű vonalzót, s a kapott helyzetben rajzoljuk meg a vektorral párhuzamos egyenest.
4. A pontból mérjük fel körzővel a vektor hosszát a félegyenesre, figyelve a vektor irányára.



Egy pont eltolása Euklideszi szerkesztéssel.

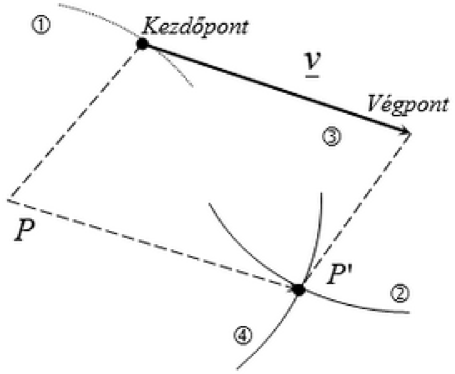
Itt az Euklideszi szerkesztés szabályai szerinti szerkesztést mutatjuk be. Az eljáráshoz legyenek adottak az alakzatok, illetve az eltolás vektora.

A paralelogramma módszer alapján végezzük el a szerkesztést.

A szerkesztés lépései:

1. *Szúrjuk bele a körzőt az adott pontba, majd vegyük körzőnyílásba a vektor kezdőpontját.*
2. *Szúrjuk bele a körzőt a vektor végpontjába, képzeljük el, hogy csúsztatással hova kerülhetne a pont, s azon a területen rajzoljunk körívet. Ne vegyük ki a körződ!*
3. *Vegyük körzőnyílásba a vektor hosszát!*
4. *Szúrjuk be a körzőt az adott pontba, majd ezzel a körzőnyílással metsszük el az előző körívet. Ez a keresett pont.*

Azért nevezzük paralelogramma módszernek, mert a vektor végpontjait az adott ponttal és a képével összekötve paralelogrammát kapunk.



Több pont eltolása: *Az egy pont eltolásánál leírt lépéseket minden pontra ismételjük meg!*

Egyenes eltolása: *Jelöljünk ki rajta két pontot (Betűkkel jelöljük meg!), majd ezeket toljuk el az adott vektorral! Az eltolt pontokon át az egyenes képe megrajzolható.*

Az egyenest, vele párhuzamos vektorral eltolva az egyenes képe megegyezik az eredetivel.

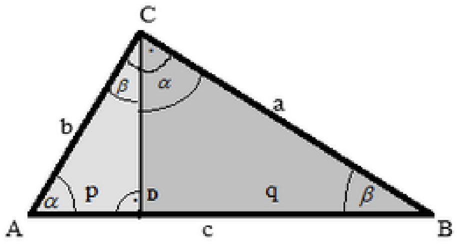
Szög eltolása: *A szög csúcsát, illetve a szögszárakon egy-egy pontot jelöljünk ki (Betűkkel jelöljük meg!), majd e három pontot toljuk el az adott vektorral. A kapott három ponton át, figyelve a szög csúcsának eltolt képére, a szög eltolt képe megrajzolható.*

Kör eltolása: *Toljuk el a kör középpontját, majd az új középpontba az eredetivel megegyező sugárral rajzoljunk kört.*

16

Derékszögű háromszög tételek

Tétel: *(Befogótétel).* A derékszögű háromszög befogója mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének: $a = \sqrt{c \cdot p}$; $b = \sqrt{c \cdot q}$

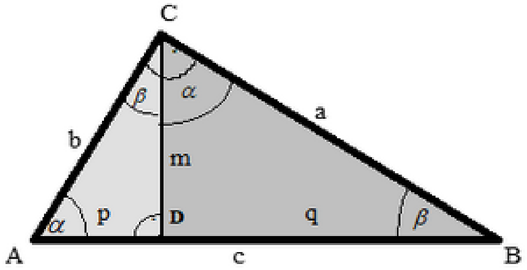


Bizonyítás:

1. Legyen adott egy **C** csúcsában derékszögű háromszög. Az oldalakra és a szögekre a szokásos jelölést alkalmazzuk.
2. A **C** csúcsból merőlegest állítunk az átfogóra, vagyis az **AB** oldalra. Ennek talppontja: **D**, mely az átfogót két részre osztja: $AD = p; BD = q$.
3. A **CD** szakasz a derékszöget két részre osztja, melyek egyenként merőleges szárú szögpárok az **ABC** háromszög hegyesszögeivel. Ebből a $90° = \alpha + \beta$ egyenlőséget kapjuk. Ezek alapján $ADC_\Delta \sim ABC_\Delta$, mert szögei páronként megegyeznek.
4. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Ez betűkkel felírva: $\frac{b}{p} = \frac{c}{b}$, melyből keresztbe szorzással a $b^2 = c \cdot p$, majd a $b = \sqrt{c \cdot p}$ egyenlőséghez jutunk.
5. Az $a = \sqrt{c \cdot q}$ egyenlőség is ugyanígy bizonyítható. A tételt tehát bebizonyítottuk.

Tétel: *(Magasságtétel.)* A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága olyan szeletekre osztja az átfogót, amelyeknek mértani közepe az átfogóhoz tartozó magassággal egyenlő: $m = \sqrt{p \cdot q}$

Bizonyítás:



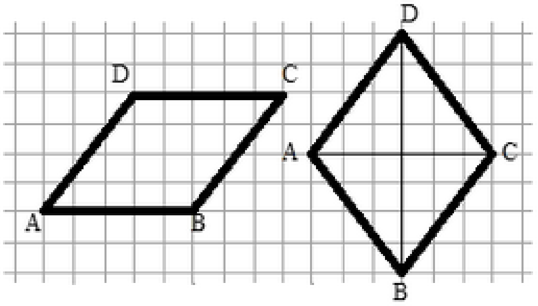
1. Legyen adott egy **C** csúcsában derékszögű háromszög. Az oldalakra és a szögekre a szokásos jelölést alkalmazzuk.
2. A **C** csúcsból merőlegest állítunk az átfogóra, vagyis az **AB** oldalra. Ez az átfogóhoz tartozó magasság: **m**. Ennek talppontja: **D**, mely az átfogót két részre osztja: $AD = p; BD = q$.
3. A **CD** szakasz a derékszöget két részre osztja, melyek egyenként merőleges szárú szögpárok az **ABC** háromszög hegyesszögeivel. Ebből a $90° = \alpha + \beta$ egyenlőséget kapjuk. Ezek alapján $ADC_\Delta \sim BDC_\Delta$, mert szögei páronként megegyeznek.
4. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}$. Ez betűkkel felírva: $\frac{m}{p} = \frac{q}{m}$, melyből keresztbe szorzással az $m^2 = p \cdot q$, majd a $m = \sqrt{p \cdot q}$ egyenlőséghez jutunk. A tételt tehát bebizonyítottuk.

Rombusz

Definíció: Az olyan paralelogrammát, melynek egyenlők az oldalai rombusznak nevezzük.

*Négyzetrácsos papíron a következő módon tudunk **rombuszt rajzolni**:*

- *Az ismert **3; 4; 5** Pitagoraszi számhármast használjuk fel. Rajzoljunk egy 5 egységnyi szakaszt. Ezután e szakasz végpontjaitól mérj „lefelé" 4-4 egységet, majd ezektől 3-3 egységet „balra". A kapott újabb két pont az előző kettővel együtt rombuszt határoz meg (minden oldala 5 egység).*
- *Rajzoljunk két, egymást merőlegesen felező, de különböző hosszúságú szakaszt, majd a végpontokat kössük össze.*

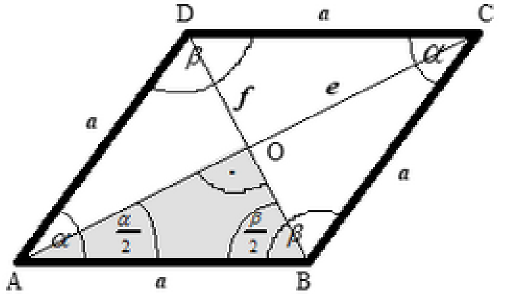


Tulajdonságok

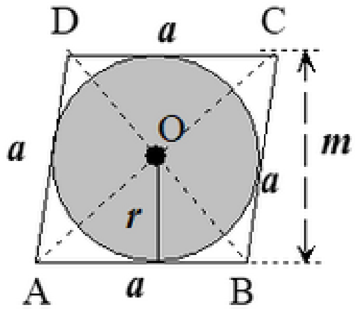
A definícióból következik, hogy minden oldala egyenlő:

$AB = BC = CD = DA = a$

Egy négyszög rombusz, ha oldalai egyenlők.



1. Szemközti szögei egyenlők:
   $DAB_{\triangleleft} = BCD_{\triangleleft} = \alpha$; $ABC_{\triangleleft} = ADC_{\triangleleft} = \beta$
2. Bármely két szomszédos belső szögének összege egyenesszög. $\alpha + \beta = 180^{\circ}$
3. Átlói merőlegesen felezik egymást: $AC \perp BD$
   Metszéspontjuk: **O**, a rombusz szimmetria középpontja. Az átlók a rombusz szimmetria tengelyei.
   Egy négyszög rombusz, ha átlói merőlegesen felezik egymást.
4. Az átlók felezik a szögeket.
   Egy négyszög rombusz, ha átlói felezik a szögeket.
5. A rombusz érintőnégyszög, vagyis a rombuszba az oldalait érintő kör rajzolható. *A kör középpontja az átlók metszéspontja.* A kör sugara a rombusz magasságának fele: $r = \frac{m}{2}$



Rombusz kerülete, területe

A rombusz **kerülete** egyenlő egy oldal hosszának négyszeresével.

A rombusz **területét** adó eljárások:

- A rombuszt részháromszögekre bontjuk, s ezek területösszegét vesszük.
- Egyenlő egy oldal hosszának és az oldalhoz tartozó magasság hosszának szorzatával.
- Egyenlő a két átló szorzatának felével.

$$K_{rombusz} = a \cdot 4$$

$$T_{rombusz} = a \cdot m_a$$

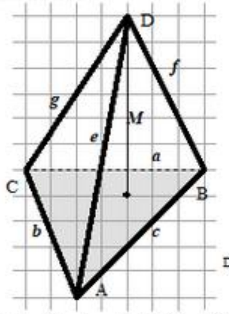
$$T_{rombusz} = \frac{e \cdot f}{2}$$

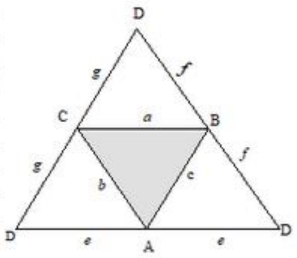
Tetraéder

Tetraéderek

Az alábbiakban néhány gúla térbeli rajzát és hálózatát készítettük el, legfontosabb értékeik meghatározásával. A háromszög alapú gúlát **TETRAÉDER**nek nevezzük. A tetraédert négy *nem egy síkban fekvő* pont, az őket összekötő hat szakasz, s a pontokra illeszkedő négy háromszöglap határolja.

Tetraéder





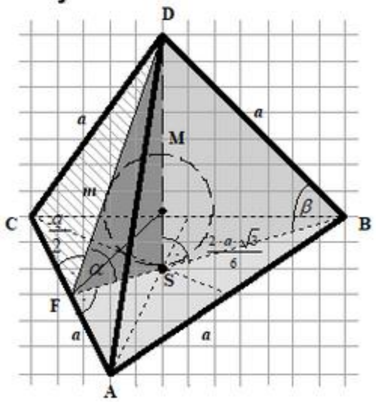
A tetraéder minden éle, lapja és szöge különböző. A tetraéderben való számításokat a hálózat elkészítése segíti.

Térbeli rajz készítése:
*Rajzoljunk egy tetszőleges **ABC** háromszöget, majd ennek lapjából kiindulva, a négyzetrácsok kihasználásával rajzoljuk meg a testmagasságot. Ennek végpontjait kössük össze a háromszög csúcsaival.*
Felszínét *a négy lap területének összege adja. A háromszög területképletei a „Területszámítás" fejezetben találhatók.*
Térfogata *az előző képlettel is kiszámítható.*

*A tetraéderbe gömb írható. Ennek **r** sugarát, s a tetraédert borító lapok* $T_1;T_2;T_3;T_4$ *területét felhasználva megadható a tetraéder térfogata:* $V=\frac{r}{3}\cdot(T_1+T_2+T_3+T_4)$ *Ha a tetraédernek létezik hozzáírt gömbje, mely három lapsíkot érint, akkor ennek sugarát is megadhatjuk. Például a negyedik laphoz hozzáírt gömb sugara:*

$$r_4=\frac{3\cdot V}{T_1+T_2+T_3-T_4}$$

Szabályos tetraéder



A szabályos tetraéderbe és a tetraéder köré gömb írható. *A beírható kör középpontját az **FSD** háromszög* α *szögfelezője metszi ki a magasságból.*
Az ezekkel kapcsolatos képletek a „Területszámítás" fejezetben találhatók.

Térbeli rajz készítése:
*Négyzetrácsos papíron rajzoljunk az ábrán láthatóhoz hasonló **ABC** háromszöget, majd rajzoljuk meg a csúcsokból a szemközti oldal felezési pontját összekötő szakaszokat. Mivel az alaplap eredetileg szabályos háromszög, így ezek súlyvonalak és magasságvonalak. Ezek metszéspontja az **S** súlypont. Rajzoljuk meg ebbe a pontba a négyzetrácsok kihasználásával a gúla **M** magasságát, majd ennek végpontjait kössük össze az **ABC** háromszög csúcspontjaival.*
Hálózata: *Szerkesszünk szabályos háromszöget, majd mindhárom oldalára egy-egy újabbat.*
Számítások:
Mivel a tetraéder szabályos háromszögek borítják, így a számításoknál ezt használjuk ki.

$$FB=FD=m_a=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$$

Testmagasság: $M=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot m_a=\frac{a\cdot\sqrt{6}}{3}$

α *: alaplap – oldallap hajlásszöge, melynek értékét az **FBD** derékszögű háromszögből határozható meg:*

β *: Alaplap – oldalél hajlásszöge, melynek értékét a **BSD** derékszögű háromszögből határozható meg.*

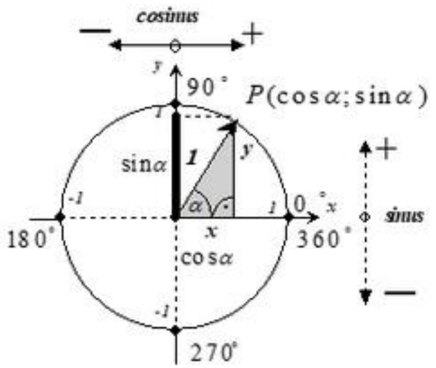
Felszíne, térfogata: $A_{tetraéder}=a^2\cdot\sqrt{3}\ ;\ V_{tetraéder}=\frac{a^3\cdot\sqrt{2}}{12}$

19

Forgásszögek szögfüggvényei

Sinus és Cosinus szögfüggvény értelmezése egységkörben

Tekintsük az egységkörben egy tetszőleges forgásszöghöz tartozó egységvektort, majd ennek végpontjából (**P**) állítsunk merőlegest az **x** tengelyre. A keletkezett derékszögű háromszög átfogója **1** egység (mivel ez a kör sugara). Felírjuk a szöggel szemközti befogó és az átfogó arányát: $\sin\alpha = \frac{y}{1}$, melyből az $y = \sin\alpha$ összefüggéshez jutunk. Így ha **az egységkörben** meghúzzuk egy tetszőleges forgásszöghöz tartozó egységvektort, akkor **az egységvektor végpontjának második koordinátáját nevezzük az adott forgásszög sinusának.**



<u>Így a sinus forgásszög előjele:</u>

- **Pozitív**, *ha a forgásszög az első és a második negyedbe esik.*
- **Negatív**, *ha a forgásszög a harmadik és a negyedik negyedbe esik.*

Ugyanebben az egységkörben, a kapott derékszögű háromszögben felírjuk a szög melletti befogó és az átfogó arányát: $\cos\alpha = \frac{x}{1}$, melyből az $x = \cos\alpha$ összefüggéshez jutunk. Így ha **az egységkörben** megrajzolunk egy tetszőleges forgásszöghöz tartozó egységvektort, akkor **az egységvektor első koordinátáját nevezzük az adott forgásszög cosinusának.**

<u>Így a cosinus forgásszög előjele:</u>

- **Pozitív**, *ha a forgásszög az első és a negyedik negyedbe esik.*
- **Negatív**, *ha a forgásszög a második és a harmadik negyedbe esik.*

ÖSSZEFOGLALVA

Az egységkör egy pontjának koordinátája: $P(\cos\alpha;\sin\alpha)$

Egységvektor felírása forgásszög szögfüggvényeivel

A koordinátarendszer egymásra merőleges bázisvektorai: $\underline{i}$; $\underline{j}$. Így egy vektor $\underline{a} = x\cdot\underline{i} + y\cdot\underline{j}$ alakba írható.

Az előző definíciók a következőképpen fogalmazhatók át:

A $\sin\alpha$ értéke a koordinátasíkon az $\underline{i}$ vektortól α szöggel elforgatott egységvektor **y** koordinátája.

A $\cos\alpha$ értéke a koordinátasíkon az $\underline{j}$ vektortól α szöggel elforgatott egységvektor **x** koordinátája.

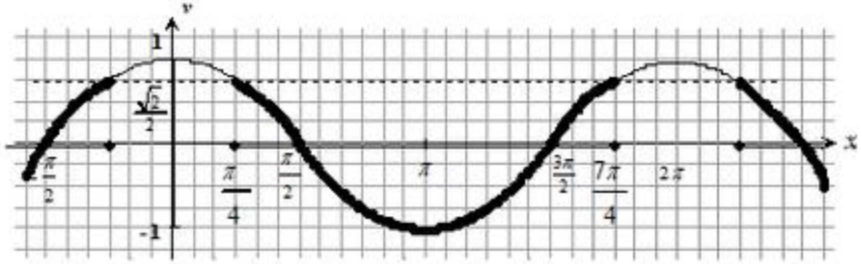
Ezekből következik, hogy az α szöggel elforgatott egységvektor felírható: $\underline{e} = \cos\alpha\cdot\underline{i} + \sin\alpha\cdot\underline{j}$ alakban.

Trigonometrikus egyenlőtlenség

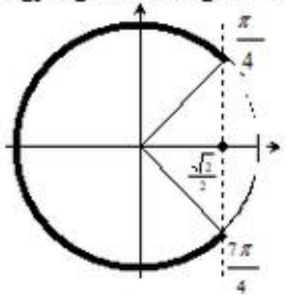
2.) $\cos\left(6x-\frac{3\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

A kifejezés zárójelében szereplő kifejezésre vezessünk be egy új ismeretlent: $v=6x-\frac{3\pi}{4}$ *Így az egyenlőtlenség:* $\cos v\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ *alakba írható. Ezt oldjuk meg az említett kétféle módon.*

Grafikus megoldás



Egységkörös megoldás



Mindkét esetben ugyanarra a megoldásra jutunk: $v\in\left[\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\pi;\frac{7\pi}{4}+l\cdot 2\pi\right]\ (l\in Z)$

Így az eredeti egyenlőtlenség megoldását a $6x-\frac{3\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\pi;\frac{7\pi}{4}+l\cdot 2\pi\right]\ (l\in Z)$ *megoldása adja. Az intervallum kezdő és végértéke egy-egy egyenlőtlenséget jelez. Ugyanúgy oldjuk meg, mint az eddig ismert egyenleteket, csak a kezdő és végértékkel egyszerre dolgozunk az alábbi módon.*

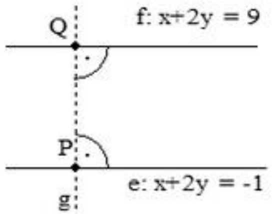
$6x-\frac{3\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\pi;\frac{7\pi}{4}+l\cdot 2\pi\right]\ (l\in Z)$	*Az intervallum kezdő és végértékhez hozzáadunk* $\frac{3\pi}{4}$ *-et.*
$6x\in\left[\frac{4\pi}{4}+l\cdot 2\pi;\frac{11\pi}{4}+l\cdot 2\pi\right]\ (l\in Z)$	*Az intervallum kezdő és végértékét elosztjuk 6-tal, s egyszerűsítünk.*
$x\in\left[\frac{\pi}{6}+l\cdot\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{24}+l\cdot\frac{\pi}{3}\right]\ (l\in Z)$	*Ez az egyenlőtlenség megoldása!*

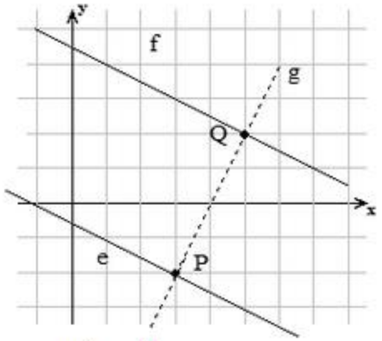
Párhuzamos egyenesek távolsága

2.) Két egymással párhuzamos egyenes egyenlete: $e:\ x+2y=-1$; $f:\ x+2y=9$ Határozzuk meg a két egyenes távolságát!

<u>I. megoldás:</u>

<u>Vázlat:</u> Rajzoljunk két párhuzamos egyenest, majd az egyiket **e**-vel, a másikat **f**-el jelöljük el. Ha meg szeretnénk kapni a két párhuzamos egyenes távolságát, akkor merőlegest kell állítani, például az **e** egyenes **P** pontjába. Jelölje ezt az egyenest **g**. Ez a **g** egyenes metszi a másik egyenest is, például a **Q** pontban. A **P** és **Q** pont távolsága egyenlő a két párhuzamos egyenes távolságával.





Legyen a **P** pont első koordinátája: **x=3**. Ezt behelyettesítjük az **e** egyenes egyenletébe: $3+2y=-1 \Rightarrow\ y=-2$ Így a **P** pont koordinátái: $P(3;-2)$

Meghatározzuk az **e** egyenes irányvektorát: $\underline{v}_e\left(\overset{A}{-2};\overset{B}{1}\right)$ Felírjuk az **g** egyenes egyenletét, mely átmegy a $P\left(\overset{x_0}{3};\overset{y_0}{-2}\right)$ ponton. Mivel **g⊥e**, így a normálvektoros egyenletet is alkalmazhatjuk: $Ax+By=Ax_0+By_0$ *(A szükséges jelöléseket az irányvektor és a pont fölé írtuk!)* Az egyenletbe behelyettesítve: $g:\ -2x+y=-2\cdot 3+1\cdot{}^{-}2\ \Rightarrow\ g:\ -2x+y=-8$ a **g** egyenes egyenletét kapjuk.

A **g** és az **f** egyenesek metszéspontja a **Q** pont. Így a két egyenes által meghatározott egyenletrendszer megoldása a **Q** pont koordinátáit adja. Azaz $g\cap f\Rightarrow Q$

$$\left.\begin{array}{l} f:\ x+2y=9 \\ g:\ \underline{-2x+y=-8} \end{array}\right\}\Rightarrow\ y=2x-8$$

$$x+2\cdot(2x-8)=9$$

$$x+4x-16=9$$

$$5x=25\Rightarrow \underline{\underline{x=5}}\ \Rightarrow y=2\cdot 5-8\Rightarrow \underline{\underline{y=2}}$$

Így a $Q(5;2)$ pontkoordinátát kapjuk.

Meghatározzuk a **PQ** szakasz hosszát az ismert $|PQ|=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)}$ távolságképlettel. Így

$$|PQ|=\sqrt{(3-5)^2+(-2-2)^2}=$$

$$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt{5}}}$$

II. megoldás:

Az első megoldáshoz hasonlóan meghatározzuk egy **e** egyenesen levő **P** pont koordinátáit: $P(3;-2)$, majd a "Pont és egyenes távolsága" című fejezetben adott $d_{(P;f)}=\dfrac{|a\cdot p_1+b\cdot p_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ képlet alapján határozzuk meg.

Ehhez az **f** egyenes egyenletét: $ax+by+c=0$ explicit alakba írjuk: $f:\ \overset{a}{1}\cdot x+\overset{b}{2}\cdot y-\overset{c}{9}=0$. Ebből írjuk fel a távolságot: $d_{(P,f)}=\dfrac{|1\cdot 3+2\cdot{}^{-}2+{}^{-}9|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|3-4-9|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{10\cdot\sqrt{5}}{5}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt{5}}}$

22

Kör és pont; kör és egyenes kölcsönös helyzete

Kör és ponthalmazok helyzetei

A síkban a körvonal helyzetét vizsgáljuk egy ponthoz, egy egyeneshez és egy másik körhöz.

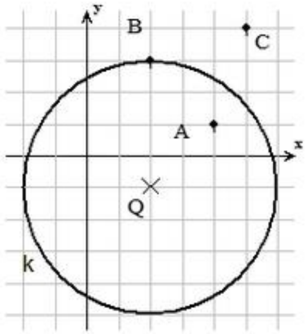
Kör és pont kölcsönös helyzete

Ha adott a $k:\ (x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ egyenletű kör, akkor egy $P(p_1;p_2)$ koordinátájú pont

I. A körvonalon belül (a körlapon) van, ha:

$(p_1-u)^2+(p_2-v)^2<r^2$

Az $A(4;1)$ koordinátájú pont a $k:\ (x-2)^2+(y+1)^2=16$ egyenletű körvonalon belül van, mert $(4-2)^2+(1+1)^2=4+4=\underline{\underline{8<16}}$



II. A körvonalon pontosan rajta van, ha:

$(p_1-u)^2+(p_2-v)^2=r^2$

A $B(2;3)$ koordinátájú pont a $k:\ (x-2)^2+(y+1)^2=16$ egyenletű körvonalon van, mert $(2-2)^2+(3+1)^2=0+4^2=\underline{\underline{16=16}}$

III. A körvonalon (a körlapon) kívül van, ha:

$(p_1-u)^2+(p_2-v)^2>r^2$

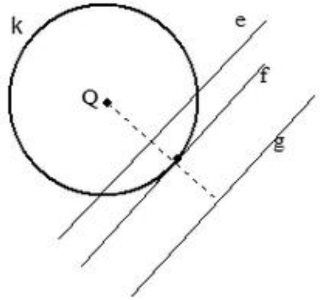
A $C(5;4)$ koordinátájú pont a $k:\ (x-2)^2+(y+1)^2=16$ egyenletű körvonalon kívül van, mert $(5-2)^2+(4+1)^2=9+25=\underline{\underline{34>16}}$

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

Ha adott a $k:\ (x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ egyenletű kör és egy $e:\ ax+by+c=0$ egyenletű egyenes, akkor a kör és az egyenes helyzetét a következő lehetőségek alapján határozhatjuk meg.

I. A $k\cap e\Rightarrow M$, vagyis a két egyenlet által meghatározott $\left.\begin{array}{l} k:(x-u)^2+(y-v)^2=r^2 \\ e:ax+by+c=0 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldásainak száma adja.

1.) Ha két megoldás van, akkor az egyenes metszi a kört.
2.) Ha egy megoldás van, akkor az egyenes érinti a kört.
3.) Ha nincs megoldás, akkor az egyenes nem metszi a kört.



II. A $k:\ (x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ egyenletű kör $Q(u;v)$ középpontjának és az $e:\ ax+by+c=0$ egyenletű egyenes távolságát: $d_{(e;Q)}=\dfrac{|a\cdot u+b\cdot v+c|}{\sqrt{u^2+v^2}}$ a kör sugarához viszonyítjuk.

1.) Az egyenes metszi a kört, ha $d_{(e;Q)}<r$
2.) Az egyenes érinti a kört, ha $d_{(e;Q)}=r$
3.) Az egyenes a körön kívül halad, ha $d_{(e;Q)}>r$

23

Mértani sorozatból számtani sorozat

4.) Valamely mértani sorozat három szomszédos tagjának összege 52. Ha az első tagjához 2-t, a másodikhoz 10-et, a harmadik tagjához 2-t hozzáadunk, akkor egy számtani sorozat három szomszédos tagjához jutunk. Melyek a sorozatok tagjai?

A feladat alapján mértani sorozatból számtani sorozatot kapunk.
Táblázatot készítünk, s ebbe írjuk a számtani és a mértani sorozat tagjait.

Sorszám:	1.	2.	3.	
Mértani sorozat:	a_1	$a_1 \cdot q$	$a_1 \cdot q^2$	*A sorozat első tagjához viszonyítjuk a másodikat és a harmadikat.*
Számtani sorozat:	a_1+2	$a_1 \cdot q+10$	$a_1 \cdot q^2+2$	*A mértani sorozat tagjaihoz viszonyítjuk a számtani sorozat tagjait.*

Összefüggések:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 52$$

$$\textbf{I.} \Rightarrow \quad a_1 \cdot \left(1+q+q^2\right) = 52$$

A mértani sorozat összege ***52.*** *Nem célszerű az összegképletet alkalmazni, mert az bonyolultabbá tenné az egyenletet, mint ez a felírás. A baloldalból az a_1 értékét kiemeljük.*

Egy sorozat számtani, ha a különbség-sorozata állandó. Ez azt jelenti, hogy ha a ***2.*** *tagjából kivonjuk az* ***1.*** *tagot, akkor a különbség értékeként ugyanannyit kell kapni, mint ha a* ***3.*** *tagból kivonnánk a* ***2.*** *tagot. Mindkét különbség ugyanazt a differenciát adja eredményül.*

$$(a_1q+10)-(a_1+2) = (a_1q^2+2)-(a_1q+10)$$

$$a_1q+10-a_1-2 = a_1q^2+2-a_1q-10$$

$$16 = a_1q^2 - 2a_1q + a_1$$

$$\textbf{II.} \Rightarrow \quad a_1 \cdot \left(q^2-2q+1\right) = 16$$

A kapott egyenletet oldjuk meg. Felbontjuk a zárójeleket, majd átrendezzük a tagokat. Az ***a_1*** *kiemelhető, miközben az egyenlet két oldalát felcseréljük.*

$$\left.\begin{array}{ll} I. & a_1 \cdot (q^2+q+1) = 52 \\ II. & a_1 \cdot (q^2-2q+1) = 16 \end{array}\right\} \downarrow :$$

A két egyenletet írjuk fel, majd elosztjuk egymással. $(a_1 \neq 0; |q| \neq 1)$.

$$\frac{q^2+q+1}{q^2-2q+1} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$4q^2+4q+4 = 13q^2-26q+13$$

$$0 = 9q^2-30q+9 \qquad /:3$$

$$3q^2-10q+3=0$$

$$q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} q_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ q_2 = 3 \end{cases}$$

Ha $\underline{\underline{q = \frac{1}{3}}}$*, akkor*

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1\right) = 52$$

$$a_1 \cdot \frac{13}{9} = 52 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 36}}$$

Ha $\underline{\underline{q = 3}}$*, akkor*

$$a_1 \cdot (9+3+1) = 52$$

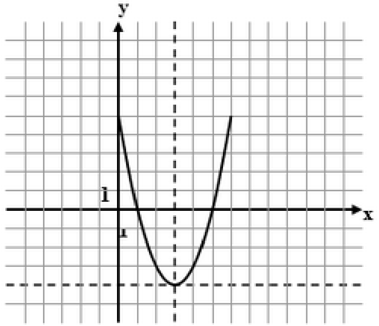
$$a_1 \cdot 13 = 52 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 4}}$$

MEGOLDÁS ⇒	***Mértani sorozat:***	***Számtani sorozat:***
Ha $a_1 = 36; q = \frac{1}{3}$*, akkor a sorozat tagjai:*	36; 12; 4	38; 22; 6
Ha $a_1 = 4; q = 3$*, akkor a sorozat tagjai:*	4; 12; 36	6; 22; 38

Függvény ábrázolás jellemzés

5.) Másodfokú függvény I.

$$m: R \to R, x \mapsto (x-3)^2 - 4$$



*A függvény másodfokú, így képe parabola lesz. Tengelypontja: $T(3;-4)$. Ebbe a pontba új koordinátarendszert rajzolunk, s ábrázoljuk az alapfüggvény pontjait, mivel a szorzószám **1**.*

Függvény vizsgálat:

$D_m : x \in R$

$R_m : m(x) \in [-4;+\infty[$

<u>Szélső értéke:</u> $x_{\min} = 3$, $m(x_{\min}) = -4$

<u>Zérushely:</u> $x_{0_1} = 1$; $x_{0_2} = 5$

<u>Menete:</u>

$x \in]-\infty;+3] \Rightarrow$ szigorúan monoton csökken.

$x \in [+3;+\infty[\Rightarrow$ szigorúan monoton nő.

<u>Korlátosság:</u> Alsó korlátja van: **K= - 4**

Nem páros és nem páratlan.

6.) Másodfokú függvény II.

$$m: R \to R, x \mapsto -2x^2 - 12x - 10$$

A függvény ebben a formában csak táblázattal ábrázolható, Ezért átalakítjuk:

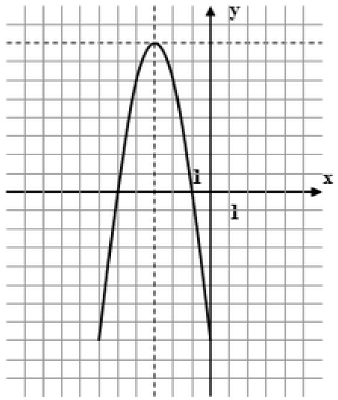
$m(x) = -2\cdot(x^2 + 6x) - 10 =$ — *A hozzárendelés első két tagjából kiemelünk –2-t.*

$= -2\cdot(x^2 + x\cdot 3\cdot 2) - 10 =$ — *A kapott zárójelben két tag összegének négyzete szerepel a második tag négyzetének értéke nélkül.*

$= -2\cdot[(x+3)^2 - 9] - 10 =$ — *A szögletes zárójelben felírjuk a teljes négyzetet, de a második tag négyzetét levonjuk ebből.*

$= -2\cdot(x+3)^2 + 18 - 10 =$ — *A szögletes zárójel felbontásával már ábrázolható másodfokú függvény képe látszik.*

$= -2\cdot(x+3)^2 + 8$ — *Ezt az összevonással megkaptuk.*



*A függvény másodfokú, így képe parabola lesz. Tengelypontja: $T(-3;8)$. Ebbe a pontba új koordinátarendszert rajzolunk, s ábrázoljuk az alapfüggvény értékeit annak **–2** szeresével megszorozva.*

Függvény vizsgálat:

$D_m : x \in R$

$R_m : m(x) \in [-\infty;+8[$

<u>Szélső értéke:</u> $x_{\max} = -3$, $m(x_{\max}) = 8$

<u>Zérushely:</u> $x_{0_1} = -1$; $x_{0_2} = -5$

<u>Menete:</u>

$x \in]-\infty;-3]$ szigorúan monoton nő.

$x \in [-3;+\infty[$ szigorúan monoton csökken.

<u>Korlátosság:</u> Felső korlátja van : **K= 8**

Műveletek eseményekkel

Műveletek eseményekkel

Az alábbi műveletek esetében a következő példát fogjuk használni.

H={A 4,5,6,7 számkártyákból véletlenszerűen kiválasztunk kettő kártyát, s egymás mellé tesszük.}= ={45; 46; 47; 54; 56; 57; 64; 65; 67; 74; 75; 76.}, tehát |H|=12.

A={Páros számot kapunk.}={46; 54; 56; 64; 74; 76}, így |A|=6.

B={Hárommal osztható számot kapunk.}={45; 54; 57; 75}, melynek számossága |B|=4.

- Az **A** és **C** események **azonosak**, ha egy kísérlet során mind a kettő bekövetkezik, vagyis A=C.

- Az A esemény **komplementer** (ellentett) eseményének nevezzük azt az eseményt, amely akkor következik be, amikor az A esemény nem. Jele: $\bar{A}$
  $\bar{A} = \{45; 47; 57; 65; 67; 75\}$ Innen $|\bar{A}| = 6$
  Ezek egy tulajdonsággal is megadhatók: $\bar{A} = \{Páratlan\ számok\}$.

- Az **A és B események összegén** azt az eseményt értjük, amelyik akkor következik be, amikor legalább az egyik bekövetkezik.
  $A + B = \{45; 46; 54; 56; 57; 64; 74; 75; 76\}$ Így |A+B|=9.
  Másként úgy is fogalmazhatunk, hogy vagy **az A vagy B esemény** bekövetkezik.

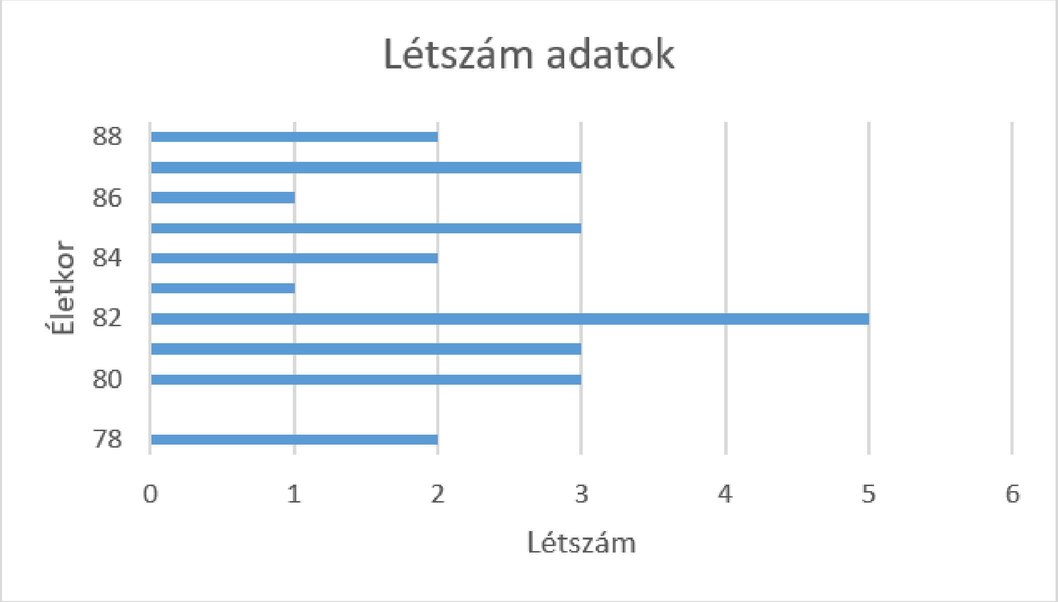
- Az **A és B események szorzatán** azt az eseményt értjük, mely akkor következik be, amikor mindkettő egyidejűleg bekövetkezik. $A \cdot B = \{54\}$
  Így $|A \cdot B| = 1$
  Másként úgy is fogalmazhatunk, hogy az **A és B esemény** egyszerre következik be.

- Az **A; B események különbségén** azt az eseményt értjük, mely akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, de a B nem. $A - B = \{46; 56; 64; 74; 76\}$ amelynek számossága: $|A - B| = 5$.
  Természetesen ugyanígy értelmezzük a $B - A = \{45; 57; 75\}$ különbséget is. Ennek számossága: $|B - A| = 3$

- Az **A és B esemény szimmetrikus differenciája** az az esemény, mely akkor következik be, amikor az A és B közül pontosan az egyik következik be.
  $A \,\Delta\, B = \{45; 46; 56; 57; 64; 74; 75; 76\}$ Ennek számossága: $|A \,\Delta\, B| = 8$

Statisztika mintafeladat

4.) Egy idősek otthonában az ott lakók életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi oszlop-diagram.



a.) Készíts az adatokból táblázatot, majd kördiagramot!

b.) Mennyi az ott lakók életkorának átlaga, szórása, módusza és mediánja?

Az a.) feladat megoldásához táblázatot készítünk, majd írjuk be a grafikonon látható értékeket:

Életkor (év)	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
Fő	2	0	3	3	5	1	2	3	1	3	2

Ezek után egyszerű összeadással meghatározzuk, hány idős emberről készült ez a táblázat. Az összeadás eredménye 25.

Az adatok átlaga:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 78 + 3\cdot 80 + 3\cdot 81 + 5\cdot 82 + 1\cdot 83 + 2\cdot 84 + 3\cdot 85 + 1\cdot 86 + 3\cdot 87 + 2\cdot 88}{25} = \frac{2078}{25} = 83{,}12$$

Az otthonban lakók **átlag életkora tehát 83,12 év**.

Az adatok szórása:

$$D_n^2(\bar{x}) = \frac{2\cdot(78-83{,}12)^2 + 3\cdot(80-83{,}12)^2 + 3\cdot(81-83{,}12)^2 + \cdots + 2\cdot(88-83{,}12)^2}{25} = \frac{214{,}64}{25} = 8{,}5856$$

Ebből gyökvonással kapjuk **a szórás értékét**:

$$D_n(\bar{x}) = \sqrt{8{,}5856} \approx 2{,}9301$$

Az adatok **módusza 82 év**, hiszen 5 főnek ez az életkora. a leggyakoribb életkor.

27

Valószínűség számítás mintafeladat

4.) Egy szelvényt kitöltve, mi a valószínűsége annak, hogy négyes találatunk lesz az Skandináv lottón? (A telitalálathoz 35 számból kell 7-et eltalálni.)

A feladat szövege alapján: $H = \{35\ számból\ választunk\ 7-et\} = \binom{35}{7} = 6\,724\,520$

A keresett esemény: $A = \{A\ 7\ számból\ 4\ számot\ eltalálunk.\}$

Azt, hogy négyes találatunk lesz, azt jelenti, hogy 35 számból „csak" négyet kell eltalálni, és emellett 35 számból hármat „nem kell eltalálni". Az A esemény bekövetkezéséhez még egy másik eseménynek is teljesülni kell: $B = \{A\ 7\ számból\ 3\ számot\ nem\ találálunk\ el.\}$

Az **A** és **B** esemény egyszerre kell, hogy teljesüljön, vagyis a két esemény szorzatának valószínűségét kell vennünk.

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = \binom{7}{4} \cdot \binom{7}{3} = 35 \cdot 35 = 1225$$

Ezek alapján már meg tudjuk határozni a 4 találat valószínűségét:

$$p(A \cdot B) = \frac{1225}{6724520} = \frac{245}{1344904} \approx 0{,}0182169\%$$

5.) Bence a légpuska lövészethez olyan céltáblát készített, melyben 1-10-ig koncentrikus köröket rajzolt, melyek egymástól fél cm távolságban vannak. A legkisebb (10-es kör) 1cm átmérőjű. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább 7-es lő, ha biztos, hogy minden lövésével eltalálja a céltáblát?

A legkisebb kör (10-es) sugara 0,5 cm, a legnagyobb köré (1-es) 5,5 cm, a 7-es köré 2,5 cm.

Itt most területekkel dolgozunk. Az eseménytér az 5 és fél cm sugarú kör, az esemény pedig a legalább 7-es találatot jelző 2,5 cm sugarú kör területe.

$$|H| = 5{,}5^2 \cdot \pi\ ;\ |A| = 2{,}5^2 \cdot \pi$$

Ebből

$$p(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{2{,}5^2 \cdot \pi}{5{,}5^2 \cdot \pi} = \frac{6{,}25}{30{,}25} = \frac{625}{3025} =$$

$$= \frac{25}{121} \approx 20{,}66\%$$

N-edik gyökvonás feladatok

7.) Gyöktelenítsd a következő törtek nevezőjét!

a.) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} =$

b.) $\frac{15}{\sqrt[4]{125}} =$

c.) $\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{25}} =$

d.) $\frac{2\cdot\sqrt[5]{8\cdot d}}{\sqrt[5]{16\cdot d^3}} =$

e.) $\frac{8}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} =$

f.) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}} =$

8.) Írd fel a megadott számokat a feladatban adott gyökjellel!

a.) $\sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{} = \sqrt[8]{} = \sqrt[12]{}$

b.) $\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[6]{} = \sqrt[18]{} = \sqrt[24]{}$

c.) $\sqrt[12]{7^{24}} = \sqrt[4]{} = \sqrt[3]{} = \sqrt[2]{}$

d.) $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[4]{} = \sqrt[12]{} = \sqrt[20]{}$

9.) Melyik szám a nagyobb?

a.) $\sqrt[3]{5}$ vagy $\sqrt[4]{3}$

b.) $\sqrt[5]{8}$ vagy $\sqrt[3]{3}$

c.) $5\cdot\sqrt[4]{8}$ vagy $6\cdot\sqrt[3]{5}$

d.) $3\cdot\sqrt[5]{7}$ vagy $4\cdot\sqrt[6]{5}$

10.) Az N-edik gyökvonás azonosságai alapján írd fel egyetlen gyökjellel a következő műveleteket!

a.) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}=$

b.) $\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[4]{7} =$

c.) $\frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[5]{3}} =$

d.) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{5}} =$

e.) $\left(\sqrt[7]{6^3}\right)^4 =$

f.) $\left(\sqrt[4]{3^5}\right)^3 =$

g.) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} =$

h.) $\sqrt[5]{\sqrt[7]{18}} =$

i.) $\sqrt[2]{2\cdot\sqrt[3]{2}} =$

j.) $\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[2]{3}}} =$

11.) Határozd meg a következő kifejezések pontos értékét!

a.) $\sqrt[3]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{17}} =$

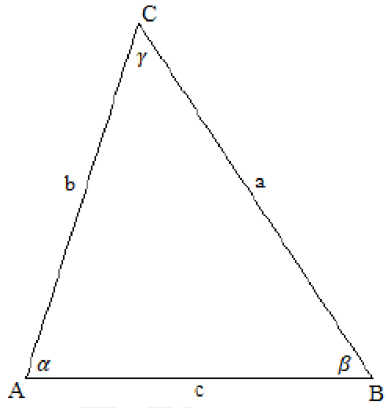
b.) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6-2\cdot\sqrt{5}} =$

c.) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right) =$

Sinus és Cosinus tétel feladatok

1.) Egy háromszögben a szokásos jelöléseket alkalmaztuk. Határozd meg az alábbi adatok ismeretében a háromszög hiányzó

- oldalait,
- szögeit,
- területét,
- beírható körének sugarát,
- köré írható körének sugarát!



$a.)\ a = 9\ dm;\ b = 7\ dm;\ \alpha = 78^{\circ}$

$b.)\ a = 12\ cm;\ c = 8\ cm;\ \gamma = 37^{\circ}$

$c.)\ b = 15\ cm;\ \alpha = 72^{\circ}36';\ \beta = 53^{\circ}17'$

$d.)\ c = 6\ m;\ \alpha = 76{,}42^{\circ};\ \beta = 63{,}8^{\circ}$

2.) Határozd meg az alábbi adatok ismeretében a háromszög hiányzó oldalait és szögeit, valamint területét. Az 1. feladatban adott ábra jelöléseit használtam.

$a.)\ a = 9\ dm;\ b = 7\ dm;\ \gamma = 27°$

$b.)\ b = 12\ m;\ c = \ 9\ m;\ \alpha = 103°$

$c.)\ a = 6\ cm;\ b = 4\ cm;\ c = 2{,}5\ cm$

$d.)\ a = 5\ dm;\ b = 6\ dm;\ c = 9\ dm$

3.) Egy paralelogramma A csúcsból induló hosszabbik átlója 8 cm. Ez az átló a paralelogramma A csúcsban lévő szögét 18^0-os és 37^0-os darabokra osztja. Számítsd ki a paralelogramma oldalainak hosszát!

4.) Egy 350 N nagyságú erőt bonts fel két olyan összetevőre, melyek 47^0-os és 16^0-os szöget zárnak be vele! Mekkorák az összetevő erők?

5.) Egy szimmetrikus háromszög szárszöge 60^0-os. Ezt a szöget két egyenessel három egyenlő részre osztunk. Mekkora részekre osztják ezek az egyenesek a szöggel szemközti oldalt?

6.) Egy szimmetrikus trapéz átlója 9 cm, rövidebb alapja 4 cm, egyik szöge 72^0-os. Határozd meg a trapéz kerületét és területét!

7.) Egy paralelogramma területe 534 cm^2, egyik oldala 15 cm, egyik szöge 34^0-os. Határozd meg a másik oldal és a hosszabbik átló hosszát!

Sokszögek feladatok

Sokszögek

1.) Határozd meg a táblázat hiányzó adatait, ha az adatok szabályos sokszögekre vonatkoznak!

Oldalak száma:	12							
Egy csúcsból húzható átlók száma:		9						
Az egy csúcsból húzható átlók ennyi háromszögre bontják a sokszöget:			14					
Belső szögeinek összege:				2880^0				
Középponti szöge					15^0			
Egy belső szöge:						$168,75^0$		
Egy külső szöge:							18^0	
Összes átlóinak száma:								819

2.) Létezik-e olyan sokszög, melynek 405 átlója van?

3.) Hány fokos szöget zárnak be egymással a szabályos sokszög egy csúcsból húzható átlói, ha az oldalak száma:

a.) 5
b.) 6
c.) 8
d.) 10

4.) Szerkessz szabályos

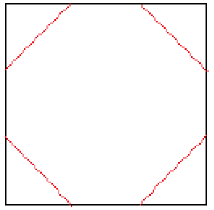
a.) ötszöget,
b.) hatszöget
c.) nyolcszöget

majd rajzold meg az összes átlóját! Hány átlót rajzoltál? Számítással ellenőrizd!

5.) Szerkessz szabályos hatszöget, melynek oldalai 3 cm-esek. Ezután mindegyik oldalát kifelé, minden szakasz esetén jobbra haladva hosszabbítsd meg 3 cm-rel. A szakaszok végpontjai egy újabb hatszöget határoznak meg.

a.) Mekkorák a szögei?
b.) Mekkora a kerülete?
c.) Mekkora a területe?

6.) Rajzolj egy 6 cm oldalú négyzetet, majd oldalait oszd 3 egyenlő részre. Az osztópontokat az ábrán látható módon összekötöttük.



a.) Hány fokosak a nyolcszög szögei?
b.) Mekkora a nyolcszög kerülete?
c.) Mekkora a nyolcszög területe?
d.) Lehet-e olyan kört rajzolni, mely átmegy a nyolcszög mindegyik csúcsán? Miért?

7.) Egy 6 cm oldalú négyzet sarkaiból úgy vágunk le egyenlő szárú derékszögű háromszögeket, hogy a maradék síkidom szabályos nyolcszög legyen.

a.) Mekkorák a levágott derékszögű háromszögek befogói?
b.) Mekkora a szabályos nyolcszögbe írható kör sugara?
c.) Hány százaléka a nyolcszög területe a négyzet területének?

8.) Egy sokszög átlói számának tizenketted része az oldalainak száma. Hány oldalú a sokszög?

Gúla számítási feladatok

Gúla

27.) Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle 8 dm, magassága 12 dm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

28.) Egy háromszög alapú gúla alapélei 6cm, 7cm és 8 cm hosszúak, testmagassága 15 cm. Mekkora a térfogata?

29.) Egy szabályos tetraéder felszíne $36 \cdot \sqrt{3}\ cm^2$. Mekkora a magassága és a térfogata?

30.) Egy templomtorony tetejére 8 m magas és 6m alapélű négyzet alapú gúla formájú, vörösrézből készült tetőt terveznek. Mennyibe kerül a vörösréz lemez tető, ha a 2 m^2-es, 4 mm vastag lap ára 462 483 Ft+Áfa, ha a szabáshoz 15% hulladékot számolnak?

31.) Egy szabályos hatszög alapú gúla alapéle 3,6 m, oldaléle 8,5 m. Mekkora a felszíne és a térfogata?

32.) Egy piramis négyzet alapú gúla alakú, melynek alapéle 230 m, magassága pedig 137 m.

a.) Mekkora a térfogata (ha nem vesszük figyelembe a benne lévő sírkamrát és járatokat)?

b.) Ha az éle mentén fel szeretnénk rá sétálni, akkor mekkora utat kellene bejárnunk?

c.) A piramis oldalát régen vakolat borította, Mekkora felületet kellett a munkásoknak befedni?

d.) A piramis tetejét régen egy aranyból készült „sapka” fedhette. Ha ez igaz, akkor mennyi aranyat használhattak fel, ha a sapka tegyük fel 3 cm vastag volt, s a csúcsától lefelé az él mentén 5 m-re volt az alja a négyzet alapú gúla alakú „sapkának”? (Megközelítő számítást adj!)

e.) Hány m^3 követ használtak fel az építéséhez, ha a belsejében 2500m^3 helyet hagytak a járatoknak, kamráknak?